



森林 数字观察日记

森林学者 Dudu 博士的研究成书——
孩子怎么玩，会长出什么能力

 Dudu 博士 · 著 momomori 森林 · 学者

森林版

momomori · 一片孩子玩着长大的小森林

写给爸爸妈妈读，孩子只管玩 · 会数数就能一起玩 · momomori.com

00

你好，我是 Dudu

我住在 momomori——一片藏在人类世界旁边的小森林。孩子们来这里玩；我在这里做研究。因为总抱着一本厚厚的日记本，森林里的朋友都叫我 Dudu 博士。

我这些年只研究一件事：**孩子是怎么在“玩”里，长出能力的。**

为了这项研究，我一直观察着森林外的一户人类家庭：一位爸爸，和他现在上一年级的儿子。这家人很少为学习内耗，孩子作业完成得自然，状态稳定，成绩也不错。但真正让我着迷的不是成绩，而是这个孩子身上有一种东西：**他自己想看、自己想试、自己想弄明白。**我的日记本里记满了这种能力是怎么一点点长出来的——分水果、超市估价、走路数时间、一副扑克牌的小对战、积木的拆和拼。这些看起来一点都不像学习的事，正是在他的大脑里，把数字和真实世界一点点接上了线。

我也在人类世界见过太多另一种傍晚：盯着、催着、纠着、刷着。孩子一停顿，大人就提示；一写错，就纠正；一变慢，就着急。大人以为这是负责，其实很多时候，是焦虑替孩子跑完了那段他本该自己走的路。孩子最后记住了答案，却没有经历思考；完成了作业，却没有长出能力。崩掉的也不只是数学，还有晚饭后那段本该轻松的亲子时光。

所以这本书的答案，只有一个字——**玩**。

不过我得提前说明：这本书和一般的育儿书不太一样。每一章除了观察记录，还有一节「**研究笔记**」——那是全书最硬核的部分。婴儿的数感实验、大脑的工作记忆、巴西街头卖水果的孩子、等待三秒的课堂研究……我会把这几十年里心理学家们真正验证过的东西，摊开给你看。别担心，**我会用最温柔的方式，讲最硬核的研究。**你可以泡杯茶慢慢读，也可以整节跳过——只玩每章那个小实验，孩子照样受益。

还有一件事我想先说清楚：**玩，不需要花钱。**这本书里大部分玩法，今晚就能用，工具就是家里已经有的东西。书里也会提到我们森林里的一些桌游和 app。对孩子来说，那只是一个好玩的地方；对你来说，它是“如果想要更省心的版本”，不是必需品。我更希望你合上这本书时想的是“今晚用扑克牌陪他玩一局”，而不是“我得赶紧再买点什么”。

成长本来就需要时间。少一点追赶，少一点纠错，多一点一起玩。这就是这本日记想陪你做的全部。

每一章，基本都按同一个节奏

你不用一口气读完，也不用全做。下面五个小章节，是正文每一章的固定结构（书末的**第五篇·特别篇**是我的研究底稿，另起一格，不按这个节奏）——挑一章，今晚玩一次，就够了。

● 观察记录

我的日记本里，真实发生过的一幕。

● 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

为什么他会卡在这里，不是因为笨。这是每章最硬核的部分，我讲得很温柔，跳过也不影响玩。

● 今晚的小实验

一个你立刻能用的动作，不用准备、不用花钱。

● 焦虑会说 / 你可以说

把那个着急的声音，换成一句更温柔、也更有用的话。

● Dudu 的一句话

这一章如果只记住一句。

章末还有一行「文献注」，写给想顺藤摸瓜的你。其余请放心：挑一章，今晚玩一次，就够了。

五篇 · 七章 + 特别篇

看见问题 → 给出方法 → 一起玩 → 孩子自己长出来；最后一篇，摊开我的研究底稿。数感，是这项研究看得见的第一个证明。

编码约定：「篇」是大走向；第 01—07 章是大章节；每章下设若干小章节（如 5·1、5·2...）。第五篇是一篇番外特别篇，自成一格。

第一篇 · 看见——孩子的大脑到底卡在哪

01 数字在孩子脑子里，是空的 （什么是数感）

02 会算 ≠ 懂：所谓“粗心”，多半是理解没建立

第二篇 · 方法——把抽象变成可以玩的东西

03 具象化：能数、能摆、能比，才能懂

04 生活就是最好的游戏场 （超市 / 厨房 / 出行 / 分东西）

第三篇 · 一起玩——一副扑克牌能带出什么

05 一起玩：一副扑克牌，就能开一局 （光谱 · 先玩最便宜那端）

06 退后半步：家长最该忍住的三个动作

第四篇 · 长出来——当孩子开始自己学

07 自主学习的信号：他开始自己问、自己试、自己讲

第五篇 · 特别——为什么是玩（研究底稿）

特 特别篇 · 为什么是玩：我的研究底稿，和一片小森林 （原理 · momomori）

结尾 数学，是孩子理解世界的一种方式 · 工具箱（四件） · 封底 再来一局

01

第一章

数字在孩子脑子里，是空的

数感不是孩子算得快不快，而是他知不知道一个数字在现实世界里到底意味着什么。

1.1 观察记录

日记本 · 观察记录之一

那天晚上，孩子忽然问爸爸：“100 很多吗？”爸爸愣了一下，没有马上回答。

我很喜欢这一页。对大人来说，100 当然不陌生：100 元能买什么，100 米有多远，100 块积木是一堆。但对孩子来说，100 可能只是“1 后面跟两个 0”。

他不是在问一道数学题。他是在问：这个数字，在世界上到底有多大。

大人用了几十年的数字，对孩子来说，可能只是刚认识的陌生符号。

1.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

数感，可以理解成孩子对数量的直觉：多少、大小、远近、轻重、快慢、顺序、变化、比较。关于它，我的文献柜里有几件很硬核、也很温柔的事实。

第一件事：人是带着数感出生的。心理学家给几个月大的婴儿反复看 8 个点的图案，看到他不耐烦了，再换成 16 个点——婴儿会重新盯着看很久。他还不会说话，却已经“感觉”到数量变了。研究者把这套天生的装备叫作 近似数量系统：一台粗糙但真实的“数量感应器”。

第二件事：这台感应器是“模糊档”的。它分得清 8 和 16，却分不清 8 和 9——差距越小，越费力。所以孩子比较 3 和 8 很快，比较 8 和 9 就慢，这不是退步，是感应器的精度还没磨细。精度怎么磨细？靠一次次真实的数、摆、比，不靠背。

第三件事：四个以内，人眼是“一眼报数”的。桌上三块饼干，孩子不用数就知道是三；到了七块，就得一块块点。这条分界线大人也一样。所以“数得慢”常常只是数量超出了直觉区，需要慢慢点——让他点完，别催。

把这三件事合起来看：**数感不是天赋，也不是刷题刷出来的。**它是一种现实映射能力——把纸上的符号，接回天生那台感应器、接回真实世界的东西。很多孩子会数数、会写数字、会背加法表，但映射还没建立，数字只是留在纸上。这不是笨，是线还没接上。

1.3 今晚的小实验

把数字从纸上请回到东西上。

- **估一估：**从家走到小区门口，大概几分钟？
- **比一比：**这两个袋子，哪个更重？
- **说一说：**你觉得这堆积木大概有多少块？

重点不是答案准不准，而是让孩子开始用数量去看世界。每天只玩一个，就够了。

1.4 焦虑会说 / 你可以说



焦虑会说：这么简单还不会？



你可以说：你觉得 100 大概有多大？我们一起找找看。

1.5 Dudu 的一句话

数感的本质，是让数字从纸上回到世界里。

文献注 | 婴儿数量辨别实验见 Xu & Spelke (2000, 6 个月大婴儿区分 8 vs 16 个点)；“近似数量系统”与其精度随经验发展，见德阿纳 (Stanislas Dehaene) 《数感》；“一眼报数” (subitizing, 约 4 个以内) 是知觉心理学的经典发现；皮亚杰则最早描述了儿童从具体操作走向抽象操作的顺序——顺序不能反。

会算 $\neq$ 懂：所谓“粗心”，多半是理解没建立

很多孩子看不懂题，不是拒绝学习，而是数字还没和生活经验接上。

2.1 观察记录

📖 日记本 · 观察记录之二

很多家长向那位爸爸倒过同一种苦水：孩子口算没问题，一遇到应用题就发懵。“一共”“还剩”“多几个”“少几个”，字都认识，连在一起就不知道题目里到底发生了什么。

还有更常见的——孩子被说“粗心”：数字抄错、单位漏掉、题目看反、关系弄混。

但在我的日记本里，“粗心”这个词几乎从不单独成立。仔细看，它背后多半是理解没真正建立。

 **想想看** 你家孩子最近一次被说“粗心”，是哪道题？是数字抄错了，还是把“多几个”看成了“一共”、把“还剩”当成了“原来有”？很多时候那不是马虎，是某一层还没接上。下次先别急着说“怎么又错了”，先看看他到底卡在哪一层。

2.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

数字有三层。

- **符号层**：8 长这个样子。
- **现实层**：8 个苹果、8 分钟、8 步路、8 元钱。
- **关系层**：8 比 5 多 3，8 能分成 3 和 5，8 再加 2 就是 10。

大人三层是连通的，看到“还剩几个”，脑子里自动出现“原本有、拿走、剩下”的画面。但很多孩子只停在符号层，看到的只是文字，于是只能猜：这题用加法还是减法？心理学家布鲁纳把学

习分成三种表征——先**动作**，再**图像**，最后才是**符号**——顺序不能跳。只给符号，就像只给孩子看地图，却从没带他走过那条路。

关于"粗心"，还有一件硬核的事要讲：**孩子的工作记忆很小**。工作记忆是大脑里那块"临时操作台"，研究测出来，人同时能抓住的东西大约只有四样，孩子还要更少。一道应用题，孩子要同时抓住：认字、题意、数字、关系、算法、书写——操作台早就满了。这时掉下来一个数字、看反一个关系，不是态度问题，是**超载**。所以更该做的不是骂"认真点"，而是帮他**把负担卸下来**：把题演出来、画出来、摆出来——操作台一空，错误自己就少了。

会算是结果，理解是路径。孩子背出 $3+4=7$ ，不代表他懂"合起来"；会写 100，不代表他知道 100 有多大。这个阶段最该保护的，不是速度，而是三层能不能接上。

2.3 今晚的小实验

学一个数，不急着想做题，先把它拆开玩。

拿出 7 块积木，让孩子分：3 和 4，再换成 2 和 5。他会慢慢发现，7 不是一个孤立符号，而是能拆、能合、能变的数量。

遇到应用题，先把它"演"出来。"原来有 8 个苹果，吃掉 3 个，还剩几个"——就真的拿 8 个东西，拿走 3 个。孩子看见变化，再写算式，理解会自然很多。

2.4 焦虑会说 / 你可以说

 **焦虑会说：**到底用加法还是减法都不知道？

 **你可以说：**这里是变多了，还是变少了？

2.5 Dudu 的一句话

**孩子不是看不懂题，
而是还没看见题目背后的现实动作。**

文献注 | 三种表征（动作 enactive、图像 iconic、符号 symbolic）见布鲁纳（Jerome Bruner）；工作记忆容量约 4 个组块，见 Cowan（2001）——早年米勒的说法是 7 ± 2 ，后来的测量更接近 4；"减少无关负担、保留核心思考"是认知负荷理论（Sweller）给教学最重要的忠告。

03

第三章

具象化：能数、能摆、能比，才能懂

先具象，再抽象。孩子不是从公式里理解生活，而是从生活里理解公式。

3.1 观察记录

日记本 · 观察记录之三

有一段时间，这个孩子对时间完全没概念。爸爸说“再玩 5 分钟”，他没感觉；说“30 分钟后出门”，他也没感觉。说好再玩 10 分钟就走，他点头答应，10 分钟后却觉得自己才刚开始玩。

他不是故意拖延，是脑子里根本没有“10 分钟”这个真实尺度。

后来爸爸不再只说数字，而是把时间接到具体的事上：5 分钟差不多是一首歌，10 分钟够洗漱穿衣，30 分钟是一集动画片。慢慢地，时间在孩子心里不再是个空词。

3.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

先讲一个我最爱引用的经典实验。皮亚杰把两排一样多的纽扣摆在孩子面前，一一对齐，孩子说一样多；然后当着他的面，把其中一排拉开一点距离——孩子会认真地说：“这排变多了。”倒水也一样：同样多的水，从矮胖杯倒进细高杯，孩子说水变多了。

这个实验硬核的地方在于：孩子不是没看见，也不是不聪明——是“数量不随外形变化”这条规则，在他脑子里还没长出来。它长不出来，靠讲是讲不会的；只有反复地摆、倒、数、再摆回去，孩子亲手验证过很多很多次，某一天他会忽然觉得你这个问题很好笑：“当然一样多啊。”那一刻，规则才真正长成了。

这就是为什么**具象化不是幼稚化**。具象化是把数学放回它原本生长的地方：数量来自物品，时间来自生活节奏，长度来自行走，重量来自手上的感觉。认知科学把这叫"具身认知"——理解不只发生在头脑里，也长在身体经验上。孩子拿过 5 斤米，才知道"重"不是形容词；走过 1 公里，才知道距离不是地图上的线。

成年人能直接处理符号，是因为背后已有大量经验垫着；孩子还没有。他用积木理解加法、用走路理解距离，不是在绕远路，**是在给未来的抽象打地基**。

3.3 今晚的小实验

给孩子准备一个"生活数学篮"：积木、豆子、硬币、尺子、量杯、小秤、时钟。不用贵，也不用像教具一样正式。

它的作用，是让孩子遇到抽象问题时，**有东西可以摆、可以量、可以比**。地基稳了，后面才会快。

注意：一个概念要在不同场景里反复体验才会稳，别指望演示一遍就永远懂了——皮亚杰的孩子们也是摆了很多年纽扣的。

3.4 焦虑会说 / 你可以说

 **焦虑会说：**用积木糖果太慢了，不如直接做题。

 **你可以说：**他现在慢，是在打地基。

3.5 Dudu 的一句话

**抽象不是教出来的，
是从足够多的具体经验里长出来的。**

文献注 | 数量守恒实验见皮亚杰 (Jean Piaget) 《儿童的数概念》——守恒概念通常要到具体运算阶段才稳定；具身认知 (embodied cognition) 主张概念理解扎根于身体与感官经验；新加坡数学的 CPA 教学法 (实物 Concrete → 图像 Pictorial → 抽象 Abstract) 是这条路径最成熟的课堂化版本。

04

第四章

生活就是最好的游戏场

生活不是学习的干扰项，它本身就是孩子最早、也最好的游戏场。

4.1 观察记录

📖 日记本 · 观察记录之四

有一次孩子玩游戏，突然问爸爸："这个角色还有 20 点血，被打一下掉 7 点，还能撑几下？"

这不是卷子上的应用题，但里面有减法、有估算、有资源感、有策略。孩子不是讨厌数学，他只是更容易在真实情境里理解数学。

超市也是个极好的数学现场：价格、数量、大小、重量、优惠、总价、找零，全在那儿。做饭也是：放多少水、几碗米、先做什么后做什么、等几分钟。

4.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

我的文献柜里有一组特别动人的研究。上世纪八十年代，几位研究者在巴西的街头找到一群卖水果、卖椰子的孩子。这些孩子在摊位上心算总价、找零，几乎不出错——算得又快又稳。研究者把同样的算术写成课堂算式再考他们，正确率一落千丈。

同一个孩子，同一道算术，摊位上是高手，纸上是"差生"。这组研究说明了一件根本的事：**数学能力是先的真实情境里长出来的，然后才慢慢迁移到纸上**。孩子不是"没有能力"，很多时候只是能力还住在生活里，还没搬进符号里。我们要做的不是逼他搬家，而是多修几条路，让两边通起来。

怎么修路？哈佛儿童发展中心有个很温柔的说法，叫"你来我往" (serve and return)：孩子发起一个小小的互动——一个问题、一个发现、一个眼神——大人接住它、回应它，孩子的大脑

回路就在这样的一来一回里搭起来。买东西时问一句"这两个哪个更贵", 做饭时问一句"还要等几分钟", 就是一次次发球和接球。回应必须由人来给, 这件事没有任何工具能替代。

但要小心两个坑: 一是把学习和生活分得太开, 孩子就觉得数学只属于书桌; 二是把生活化做得太用力, 孩子只想一起做个饭, 你却不停提问、纠错、考试。好的陪伴应该轻, 像聊天, 不像检查——发球接球是游戏, 不是考核。

4.3 今晚的小实验

从四个场景挑一个, 每次只抓一个点:

- **超市**: 结账前问一句"你觉得这几样大概多少钱?"
- **厨房**: 500 毫升水大概是多少? 一碗米配几碗水?
- **出行**: 到小区门口大概走几分钟? 这段路远还是近?
- **游戏**: 如果每次消耗 3 个金币, 12 个金币能用几次?

今天只感受时间, 明天只比价格, 后天只分水果。不贪多。

4.4 焦虑会说 / 你可以说

 **焦虑会说**: 玩就是玩, 跟学习有什么关系。

 **你可以说**: 你刚才在游戏里, 已经做了一道很难的应用题。

4.5 Dudu 的一句话

生活不是学习的干扰项,
它本身就是孩子最早的数学游戏场。

文献注 | 街头数学研究见 Carraher、Carraher & Schliemann (1985)《街头与学校里的数学》及 Nunes 等人的后续工作;"你来我往"(serve and return) 见哈佛大学儿童发展中心; 维果茨基 (Lev Vygotsky) 则早就指出: 学习首先发生在人与人的互动里, 然后才内化为孩子自己的思考。

05

第五章

一起玩：一副扑克牌，就能开一局

陪孩子最好的姿势，不是坐在他对面当裁判，而是坐到他旁边，做那个跟他抢着赢的人。

5.1 观察记录

日记本 · 观察记录之五

有天晚上作业写得早，爸爸随手抽出一副扑克牌："来，比大小，输的人收牌。"就这么一个破规则，孩子玩到不肯睡。他们翻牌、比大小，后来孩子自己改成"翻两张相加"，再后来他得意地宣布："谁先猜中两张加起来是多少，谁就赢。"那一晚，他做了上百次加法和比较，没写一个字，也没人逼他。临睡前他说："明天还玩。"

"明天还玩"——这四个字，是我整本日记里出现频率最高、也最重要的记录。

5.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

同样是重复，被逼着刷一张口算卷，和自己喊着"再来一局"，在孩子的大脑里是两件完全不同的事。我拆给你看，这局扑克牌里到底藏了几台"学习机器"。

第一台：心流。心理学家契克森米哈赖发现，当挑战刚好比能力高一点点，人会进入一种忘记时间、乐在其中的状态。注意那晚发生了什么：比大小玩顺了，孩子自己升级成两张相加，再升级成抢答估算——他在亲手给自己调难度，把挑战始终钉在"够得着但要跳一下"的位置。这正是维果茨基说的"最近发展区"：学习发生在踮脚能够到的地方。一个能被孩子改规则的游戏，就是一台自动对准最近发展区的机器。

第二台：提取练习。记忆研究里有个反直觉的结论：把答案从脑子里取出来一次，比把课本再看十遍更长记性。翻一张牌，算一次和，喊一个答案——每一局都是几十次微小的提取。孩子

不知道那叫练习，他以为那叫赢。

第三台：刻意练习的内核。有目标（赢）、有即时反馈（翻牌见分晓）、不断微调（下一局换个策略）——这三样正是"刻意练习"区别于机械重复的关键。被逼着刷题，三样全缺；自己喊"再来一局"，三样全在。

还有一件事同样重要：当大人从"考他的人"变成"和他抢着赢的人"，孩子的紧张就没了。（为什么"不紧张"对学习这么关键，我在特别篇里细讲。）

5.3 今晚的小实验

"玩"其实是一条光谱——从不花钱，到买一盒，到进一片小森林：

免费 · 今晚就能玩 分水果、走路数时间、一副扑克牌	桌游 把规则装进一盒	momomori 的 app 把数字藏进冒险里的那些
-------------------------------	---------------	-------------------------------

越往左越便宜，效果却不打折。**先玩最左边那一端。**森林里的东西只是把"玩"装进一个更省心的盒子，它是可选项，不是必需品。今晚最便宜的那一端，长这样——

- 1 抽掉花牌，每人摸一堆牌。
- 2 同时翻一张，数字大的赢，把两张都收走。（比较）
- 3 进阶：每人翻两张，相加大的赢。（加法）
- 4 再进阶：谁先猜中两张的和，谁赢。（估算 + 速度）
- 5 最后谁的牌多谁赢。玩坏了就改规则——让孩子自己提议新规则，是最好的部分。

不用纠正、不用记分。你只要做一件事：陪他再来一局。

5.4 焦虑会说 / 你可以说

 焦虑会说：玩牌能学到什么，不如去做两页题。

 你可以说：来，再来一局——这一局，他已经算了几十次了。

5.5 Dudu 的一句话

最好的教具，可能就是一副扑克牌；
最好的老师，是那个肯陪他再来一局的人。

文献注 | 心流见契克森米哈赖 (Mihaly Csikszentmihalyi) 《心流》；最近发展区 (ZPD) 见维果茨基《社会中的心智》；提取练习优于重复阅读 (测试效应) 见 Roediger & Karpicke (2006)；刻意练习的三要素见埃里克森 (Anders Ericsson)。

退后半步：游戏式陪伴里，家长最该忍住的三个动作

我们当然都是为孩子好，只是有时候太想帮忙，反而替孩子跳过了真正理解的过程。

6.1 观察记录

日记本 · 观察记录之六

我在人类世界见过太多这样的画面：孩子刚停顿两秒，提示已经到了；话还没说完，纠正已经来了；只错了一步，整套方法已经讲完。

表面上是高效辅导，从孩子的角度看，他的大脑刚要启动，大人已经替他跑完了。

游戏里也一样。

 **想想看** 上一次你忍住没插手，是什么时候？孩子自己磨出办法的那一刻，往往比你讲十遍都管用。如果一时想不起来，今晚就留一次机会给他——他卡住时，先把到嘴边的提示咽回去，默数三秒，再看看会发生什么。

6.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

"先等三秒"听起来像鸡汤，其实是被认真测量过的。教育研究者罗伊（Mary Budd Rowe）录下大量课堂，发现大人提问后平均等不到一秒就自己接话、换问题或叫别人。而当等待时间被刻意拉长到三秒以上，孩子的回答变长了、推理变多了、说"不知道"的次数变少了。三秒，是思考正在发生的声音。大人觉得是冷场，孩子的大脑里正热闹。

那帮忙要怎么帮？"脚手架"这个词的出处——伍德、布鲁纳和罗斯的研究——给出过一条很准的原则：孩子卡多深，才帮多浅。好的帮助是"刚好过坎的那一点"：他差一个提示，就只给一个提

示；他只是算错，就别把整道题讲一遍。帮多了，孩子学到的不是方法，而是"反正我一不会，大人就给下一步"——依赖就是这样练成的。

还有一个更反直觉的发现，叫**有效失败**：研究者让一组学生先自己挣扎着解没学过的题（大多失败了），再听讲解；另一组直接听讲解。考试时，先挣扎过的那组学得明显更深。失败不是学习的敌人，**被剥夺挣扎的机会**才是。孩子卡住的那几分钟，不是浪费，是他大脑里正在把问题翻来覆去地摸——这时候插手，等于把果实还没熟就摘了。

这背后往往不是大人不会陪，只是焦虑：怕孩子落后，急着推快一点。但理解力常常需要慢一点，才能稳。

6.3 今晚的小实验：最该忍住的三个动作

忍住	换成
孩子一停就提示	先等三秒
孩子一错就纠正	只问一个小问题
孩子一慢就催	让他先说"我看懂了哪一句"

还可以用"问题最小化"：孩子错题时，先别讲整题，先判断他是没读懂、关系不清、还是只是算错——今天只解决那一个最小的问题。

6.4 焦虑会说 / 你可以说

 **焦虑会说：**你怎么又错了 / 我不是刚讲过吗。

 **你可以说：**你先看懂了哪一句？哪一步让你卡住了？

6.5 Dudu 的一句话

好的陪伴，不是替孩子走完思考，
而是让孩子多走半步。

文献注 | 等待时间研究见 Rowe (1972 起的系列工作)；"脚手架" (scaffolding) 一词出自 Wood、Bruner & Ross (1976)，核心是"随孩子的表现增减支持"；有效失败 (productive failure) 见 Kapur (2008 起)；孩子的执行功能与工作记忆仍在发育中，见哈佛大学儿童发展中心——他不是缩小版大人。

07

第七章

自主学习的信号：他开始自己问、自己试、自己讲

真正的进步，往往不是孩子算得更快，而是他开始愿意观察、表达，和自己想办法。

7.1 观察记录

📖 日记本 · 观察记录之七

有一天，孩子看到桌上几块点心，忽然说："如果我们每人两个，好像不够。"又有一次在路上，他问："如果还要走十分钟，是不是比一首歌久？"

都不是正式的题，但这就是数学——他已经开始主动把数量、人数、分配、够不够连起来；时间在他心里有了参照。孩子的理解，常常先在生活里露头，才反映到作业里。

7.2 研究笔记：孩子的大脑发生了什么

孩子为什么会自己开始学？动机科学里最重要的一套理论——自我决定论——说，人持久的内在动力来自三样东西：**自主**（这是我自己想做的）、**胜任**（我做得越来越好）、**联结**（我和喜欢的人一起做）。回头看前六章你会发现，一局好的游戏三样全给：他自己选择玩、他一局比一局强、你就坐在他旁边。

反过来，有一个著名的实验值得每个家长知道。研究者观察一群本来就爱画画的孩子，告诉其中一组："画画就发奖状。"几周后，**被奖励过的孩子，自由时间里画画反而变少了**。这叫过度合理化效应：外部奖励会悄悄"没收"内在动机——孩子会得出结论"我画画是为了奖状"，奖状一停，画画就停。所以，当孩子已经自己喊"再来一局"时，别再叠加分数、贴纸和交易；**用奖励去逼一件本来好玩的事，只会把它变得不好玩。**

那大人还能做什么？两件被验证过的小事。一是**夸法**：德韦克的研究发现，夸“你真聪明”的孩子会开始挑简单的任务（怕输掉聪明），夸“你刚才那个办法很妙”的孩子更愿意挑战难的——夸过程和方法，不夸天赋。二是**让他讲**：学习科学里有个“教别人效应”——为了讲给别人听而学的人，学得最深。所以“当小老师”不是哄孩子的把戏，是真正的学习加速器。

当孩子开始真正理解，会出现一些很小但很重要的变化。我把它当作**自主学习的信号**：

1. 他开始主动比较：“这个多一点，那个少一点。”
2. 他开始主动提问：“为什么还剩这些？”
3. 他会用生活例子解释数字：“10 分钟差不多是一首歌多一点。”
4. 卡住时愿意画一画、摆一摆，而不是立刻放弃。
5. 他不再只问“用加法还是减法”，而是开始问“这里发生了什么变化”。

这些不一定马上变成分数，但它们是更底层的能力。分数能短期提高，理解力却决定孩子能走多远。

7.3 今晚的小实验

孩子主动说出一个数学观察时，先**接住**，别急着评对错：“你这个发现很有意思，我们一起看看。”

也可以让孩子**当小老师**：请他讲一道题，或讲一个生活里的发现，讲为什么这样分才公平。很多时候，能讲清楚，才是真的开始懂了。

7.4 焦虑会说 / 你可以说

 **焦虑会说：**（只盯着卷面）这次考了多少分？

 **你可以说：**你今天发现了什么有意思的事？

7.5 Dudu 的一句话

**真正的数学进步，不是孩子算得更快，
而是他开始用数字理解世界。**

文献注 | 自我决定论见德西与瑞安 (Deci & Ryan)；画画奖励实验 (过度合理化效应) 见 Lepper、Greene & Nisbett (1973)；夸过程不夸天赋见德韦克 (Carol Dweck) 《终身成长》及其掌握目标 / 表现目标研究；"教别人效应" (protégé effect) 见 Chase 等人 (2009)。

为什么是玩：我的研究底稿，和一片小森林

前面七章是观察记录。这一篇，我把文献柜整个打开，讲讲我们凭什么相信“玩”。

到这里，我想把日记本合上。

前面七章，讲的是“怎么玩”。

这一篇，讲的是“我们凭什么”。

这是我的研究底稿——

也是 momomori 这片森林的种子。

说到底，我们只信几件朴素的事：能力比知识重要，成长比成绩重要，体验比说教重要，具象比抽象重要。下面每一块底稿，都是在为这几句话找依据。

特·1 为什么值得早一点开始（但什么时候都不晚）

经济学家赫克曼（诺贝尔奖得主）算过一笔著名的账：在人的一生里，越是早期的能力投入，回报率越高——因为能力会滚利息：早长出来的好奇和理解力，会让后面的每一次学习都更省力。另一项追踪了几万名孩子的大型研究发现，入学时的早期数学能力，是预测多年后学业表现最强的指标之一——比早期阅读还强。

但请把这两条硬核证据读温柔一点：它们说的不是“快去抢跑”。恰恰相反——学龄前后的孩子，理解世界最自然的方式就是玩；最高回报的投入方式，就是每天那一局游戏、那一次分水果。而且这条曲线没有关门时间：大孩子缺的往往正是底层的数感和自主性，补得回来，什么时候开始都不晚。

特·2 先具象，再抽象

这条原理，是森林里每一件东西的地基——**数字必须连接真实世界**。布鲁纳：学习走三层，动作 → 图像 → 符号，顺序不能跳。新加坡数学把它课堂化成 CPA：先实物，再图画，最后算式。德阿纳说得更彻底：人脑天生带着数感（第一章那些婴儿），大人的任务不是从零灌符号，而是唤起它、**接住它**。

所以"减法"不该从 $10-7$ 开始，它该从**一盘饼干被分掉三块**开始。这不是把数学讲幼稚，是尊重**重大脑长出来的顺序**。

特·3 两种思考，两种练法

但不是所有能力都该慢慢来。卡尼曼把人的思考分成两个系统——该快的，要练到脱口而出；该慢的，要给它时间真正理解。

	系统一 · 快思考	系统二 · 慢思考
负责	直觉、自动化的反应	理解、推理、观察、决策
例子	看到 7×8 脱口而出 56	读懂一道应用题在说什么
怎么练	高频、即时反馈、速度感	慢节奏、有情境、能停下来想

为什么"快"也重要？回想第二章那张小小的操作台：工作记忆只有四格。乘法表如果要现算，就占掉两格；练到脱口而出，那两格就腾出来给"读懂题目"用了。**自动化不是为了快本身，是为了给理解腾地方**。

反过来，用错系统是灾难：把"理解"硬逼成"速度"，孩子只会紧张、乱猜。而**数感属于系统二**——它要的不是快，是懂。所以这本日记里所有的数感游戏，都是慢的、有情境的、能让孩子停下来权衡的。**该快的快，该慢的慢；顺序通常先慢后快——先懂，再快**。

特·4 玩，为什么是答案

因为一个好游戏，天然装着学习最该有的东西：目标、反馈、决策、尝试、失败、再来。

维果茨基说，游戏里的孩子，会表现得**高于他自己一个头**；蒙台梭利干脆说，游戏就是儿童的工作——孩子会像对待正经事一样，全神贯注地投入自己选择的**活动**。这些不是鸡汤，是发展

心理学反复验证过的事。

还有一层常被忽略：**玩是低压力的**。紧张和恐惧会直接挤占那张本就很小的操作台——被吼过之后“更笨了”不是错觉，是工作记忆被情绪占线了。游戏里输了就再来，没有红叉子，没有“怎么又错了”。低压力不是溺爱，是给思考留出运转的空间。

孩子喊出的那句“再来一局”，是心流被点着的声音，是自愿发起的刻意练习，也是自主学习最早的信号。我们把这四个字，当成衡量一切的北极星。

特·5 动机的科学：保护火种，别浇奖励

把第七章的底稿再摊开一点。自我决定论：持久的动力来自**自主、胜任、联结**。过度合理化效应：外部奖励会没收内在动机（那群被奖状搞得不爱画画的孩子）。德韦克：夸方法，不夸聪明；追“掌握”，不追“表现”。

这三条拧在一起，就是我们森林的动机纪律：**从不拿分数、贴纸、金币去贿赂孩子学习**。游戏本身好玩，赢本身快乐，和爸妈一起玩本身温暖——火种已经在那儿了，大人要做的只是别把它浇灭。

讲到这儿，总有家长会追一句：那成绩呢？说句实在话——**我们不追着成绩跑，我们追着能力跑，但也从不回避分数**。该争取的，我们会争取；只是顺序不能反：先把能力养出来，分数往往会自己跟上；反过来死磕分数，常常是能力和亲子关系一起赔进去。

特·6 把原理，种进森林里

把上面这些拧在一起，就成了 momomori 做游戏时的一个讲究。**森林里的游戏不止一款——后面还会有很多，覆盖时间感、金钱感、概率感……做那些重在“理解”的游戏时，我们尽量守住一个想法：能用可数、可比的东西说清楚的，就先别急着甩给孩子一个现成的数字。**

就拿其中一款数感游戏来说：生命不写“5”，画成可以一眼数清的图标；防御、出手，全是能数、能比的东西。孩子要靠看、数、比，才知道局势。你发现了吗——这正是“先具象”，被做成了一个能玩的东西。

同一套规则，可以换不同的外衣——有的孩子喜欢城堡攻防，有的孩子喜欢花园果园，外衣随他挑，底下练的是同一套能力。**我们只在玩法里分喜好，绝不在能力上分男女。**

孩子在练的能力	游戏里看到的	而不是
数量感	一排可以数的图标	"生命值-5"
比较 / 够不够	我的 vs 你的, 谁多	"攻击-3 vs 护盾-2"
加法 / 累积	再造一个	"+1"
减法 / 变化	一个被拿走	"5-1=4"
风险收益	现在出手, 还是再攒一下?	一道应用题

整局没有一个数字, 孩子却全程在数、在比、在算。这就是我们想说的: **数学, 不该从符号开始。**

但我必须诚实地补一句: 这套方法**不绑定任何一个产品**。它是一条光谱, 从免费的那一端 (第五章那副扑克牌) 一直到森林里的 app, 越往左越便宜, 效果却不打折。**森林只是更省心的盒子, 是可选项, 不是必需品。**

特·7 脚手架与园丁

最后, 说说我们到底在做什么。**我们不教孩子, 我们替他搭脚手架。**脚手架的本义 (第六章讲过它的出处) 就是: 临时托住, 随长随撤。这片森林真正想交到孩子手里的, 不是某一道题的答案, 而是一种能力——**学习任何东西的能力**。我们做的所有东西, 都是为了有一天能被撤掉。

但有一样东西永远不该被撤掉, 也没有任何工具能替代: **爸妈坐下来陪的那一局**。依恋研究把父母叫作孩子的"安全基地"——探索是从安全感出发的; 哈佛的"你来我往"也说, 回应必须由人来给。工具帮忙, 但替代不了你。还有, 你不必做完美父母——温尼科特说, **"足够好"就够了**。今晚陪一局, 就是足够好。

高普尼克分过两种养育: 木匠, 和园丁。
木匠按图纸, 把木头打造成预定的样子。
园丁不按图纸, 他营造阳光水土,
让种子自己长成它该长的样子。

我们想做园丁，不想做木匠。能力不是逼出来的，是长出来的。我们能做的，是把环境布置好，然后退后半步，看它发生。

 Dudu 的书架（想深挖的话，从这几本开始）

高普尼克《园丁与木匠》· 德韦克《终身成长》· 德阿纳《数感》· 卡尼曼《思考，快与慢》· 契克森米哈赖《心流》· 爱德华·德西《内在动机》· 维果茨基《社会中的心智》· 赫克曼的早期教育研究与新加坡数学 CPA 教学法。

玩着玩着，能力长出来。
来，再来一局。

本篇背书 | 赫克曼曲线（早期能力投资回报）· Duncan 等（2007，早期数学能力的预测力）· 布鲁纳三表征与新加坡 CPA · 德阿纳《数感》· 卡尼曼系统 1 / 2 · Cowan 工作记忆 · 维果茨基（ZPD、游戏高一个头）· 蒙台梭利 · 契克森米哈赖《心流》· 埃里克森刻意练习 · Roediger & Karpicke 测试效应 · 德西与瑞安自我决定论 · Lepper 过度合理化 · 德韦克成长型思维 · Rowe 等待时间 · Wood/Bruner/Ross 脚手架 · Kapur 有效失败 · 依恋理论与哈佛 serve and return · 温尼科特“足够好的父母”· 高普尼克《园丁与木匠》。理论只为印证观察，不替代你今晚陪他玩的那一局。



数学，是孩子理解世界的一种方式

如果这本日记只能留下一句话，我希望是：数学不是把孩子推向抽象，而是帮孩子更清楚地理解现实。

孩子会在时间里长大，也会在经验里理解。我们当然希望他学得好，但更希望他学得稳、学得不害怕、学得和真实生活有连接。

父母不需要把孩子训练成提前刷题的人。真正要保护的，是孩子对世界的好奇、对关系的敏感、对思考的信心。

对小孩子来说，数学真正的入口，可能不是一张练习卷，而是一次买菜、一次做饭、一段路、一把积木、一副扑克牌、一个等待十分钟的下午。

这也是我们种 momomori 这片小森林的原因——从生活里的小游戏，到桌游，到森林里的 app，它们只想证明一件事：陪孩子长大，可以既轻松，又有效。

父母能做的，不是替孩子把世界解释完，而是陪他慢慢看见世界里的秩序。看见数量，理解关系，保持好奇。这样，数学才不会只是学校里的任务，而会成为孩子理解世界的一种方式。

当孩子开始用数字看见世界，
数学才真正开始。

工具箱（一）：先看见，再陪玩

工具一 数感观察表

- **时间感**：是否知道 5 分钟、10 分钟、30 分钟大概能做什么。
- **数量感**：能否判断两堆东西哪边更多，而不只是从 1 开始数。
- **金钱感**：是否知道 10 元、50 元、100 元在生活里大概意味着什么。
- **距离感**：能否感受近、远、100 米、1 公里这些尺度。
- **关系感**：能否理解多几个、少几个、还剩几个、一共几个。
- **表达感**：能否用自己的话讲出一道题或一个生活里的发现。

工具二 错题最小化拆解表

- 孩子能不能把题目完整读出来？
- 能不能复述题目在说什么？
- 知道题目最后要求什么吗？
- 能不能画出来或摆出来？
- 是关系没懂，还是计算算错？
- 今天只解决哪一个最小问题？

工具箱（二）：怎么问，怎么看

工具三 提问卡

- 你先能看懂哪一句？
- 这道题在说一件什么事？
- 题目里哪些数字是已经知道的？
- 最后要我们求什么？
- 你能画出来吗？
- 你能用积木、手指、玩具摆出来吗？
- 如果数字变小一点，你会不会想？
- 你能用自己的话讲给我听吗？

工具四 玩的时候，观察这 5 个信号

陪孩子玩任何带数量的游戏（扑克牌、桌游、森林里的 app）时，不用考他，只要看他会不会自然地——

1. **数对方还剩多少**：主动去数对手还剩几张牌、几颗果子。
2. **提前算赢**："再赢两次我就赢了。"
3. **权衡取舍**：纠结现在出手，还是再攒一手牌。
4. **比较强弱**：扫一眼就判断"我的比你多"。
5. **自己改规则**：玩着玩着提议"我们加一个新规则吧"。

出现得越多，说明数感和自主性正在长出来。这比任何一张卷子都准。

— 🌸 封底 —



这不是一本教孩子刷题的书。

这是森林学者 Dudu 博士的研究成书：孩子怎么玩，会长出什么能力。里面有一户真实人类家庭的观察记录，也有心理学家们几十年里真正验证过的研究——婴儿的数感、工作记忆的操作台、巴西街头的算术、等待三秒的力量。

如果你的孩子会算题却不懂题；如果你发现他对时间、金钱、距离、数量没有真实感觉；如果你受够了焦虑式的陪伴，想换一种既轻松又有效的方式——

用最温柔的方式，讲最硬核的研究。然后，从今晚一局游戏开始。

再来一局。

玩着玩着，能力长出来，成绩自己会跟上。

momomori · 一片孩子玩着长大的小森林 · momomori.com · 小红书搜「momomori」

Dudu 博士是 momomori 森林的学者，抱着日记本记录世界。这本书里所有的研究都是真实的，所有的观察也是——它们来自森林外一户真实的人类家庭。